Тема 1 Комплексные числа.

1.1. Понятие комплексного числа

Комплексные числа вводятся в связи со следующей задачей. Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшее из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, есть

$$x^2+1=0 \tag{1}$$

Стоящая перед нами задача такова: *нужно расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение (1) уже обладало бы корнем.*

В качестве материала, из которого будет строиться эта новая система чисел, возьмем точки плоскости. Напомним, что изображение действительных чисел точками прямой линии (основанное на том, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, если при заданном начале координат и единице масштаба всякой точке прямой поставим в соответствие ее абсциссу) систематически используется во всех разделах математики и является столь привычным, что мы обычно не делаем различия между действительным числом и точкой, его изображающей.

Таким образом, *мы хотим определить систему чисел, изображающихся всеми точками плоскости.* До сих пор нам не приходилось складывать или перемножать точки плоскости, поэтому определение операций над точками мы имеем право выбирать, заботясь лишь о том, чтобы новая система чисел обладала всеми теми свойствами, ради которых мы ее создаем. Эти определения, особенно для произведения, покажутся на первый взгляд весьма искусственными. В курсе высшей алгебры показано, что никакие другие определения операций, на первый взгляд даже более естественные, не привели бы нас к цели, т.е. к построению расширения системы действительных чисел, содержащего корень уравнения (1). Так же показано, что замена точек плоскости в этом построении любым другим материалом не привела бы к системе чисел, по своим алгебраическим свойствам отличающейся от той системы комплексных чисел, которая строится ниже.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат. Условимся обозначать точки плоскости буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и записывать точку с абсциссой a и ординатой b через (a, b), т.е., несколько отступая от того, что принято в аналитической геометрии, писать $\alpha=(a,b)$. Если даны точки $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$, то суммой этих точек мы будем называть точку с абсциссой $a+c$ и ординатой $c+d$, т.е.

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\,; \tag{2}$$

Произведением точек $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$ будем называть точку с абсциссой $ac-bd$ и ординатой $ad+bc$, т.е.

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\,. \tag{3}$$

Этим путем мы определили в множестве всех точек плоскости две алгебраические операции. Покажем, что эти операции обладают всеми основными свойствами, какими обладают операции в системе действительных чисел или в системе рациональных чисел: они обе коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности и для них существуют обратные операции – вычитание и деление (кроме деления на нуль).

Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (точнее, вытекают из соответствующих свойств сложения действительных чисел), так как при сложении точек плоскости мы отдельно складываем их абсциссы и отдельно ординаты. Коммутативность умножения основана на том, что в определение произведения точки α и β входят симметричным образом. Ассоциативность умножения доказывают следующие равенства:

$$\begin{aligned}\left[(a,b)(c,d)\right](e,f) &= (ac-bd,\, ad+bc)(e,f) = \\ &= (ace-bde-adf-bcf,\, acf-bdf+ade+bce),\\ (a,b)\left[(c,d)(e,f)\right] &= (a,b)(ce-df,\, cf+de) = \\ &= (ace-adf-bcf-bde,\, acf+ade+bce-bdf).\end{aligned}$$

Закон дистрибутивности вытекает из равенств

$$\begin{aligned}\left[(a,b)+(c,d)\right](e,f) &= (a+c,\, b+d)(e,f) = \\ &= (ae+ce-bf-df,\, af+cf+be+de),\\ (a,b)(e,f)+(c,d)(e,f) &= (ae-bf,\, af+be)+(ce-df,\, cf+de) = \\ &= (ae-bf+ce-df,\, af+be+cf+de).\end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос об обратных операциях. Если даны точки $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$, то их разностью будет такая точка (x,y), что

$$(c,d)+(x,y)=(a,b).$$

Отсюда, ввиду (2),

$$c+x=a, \qquad d+y=b.$$

Таким образом, разностью точек $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$ служит точка

$$\alpha-\beta=(a-c,\, b-d) \tag{4}$$

И эта разность однозначно определена. В частности, нулем будет служить начало координат $(0,0)$, а точкой, противоположной для точки $\alpha=(a,b)$, будет точка

$$-\alpha=(-a,-b)\ . \tag{5}$$

Пусть, далее, даны точки $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$, причем точка β отлична от нуля, т.е. хотя бы одна из координат c,d не есть нуль и поэтому $c^2+d^2\neq 0$. Частным от деления α и β должна быть такая точка (x,y), что $(c,d)(x,y)=(a,b)$. Отсюда, ввиду (3),

$$\begin{aligned}cx-dy&=a\,,\\ dx+cy&=b\,.\end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, мы получим

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Таким образом, при $\beta\neq 0$ частное $\dfrac{\alpha}{\beta}$ существует и однозначно определено

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \tag{6}$$

Полагая здесь $\beta = \alpha$, мы получим, что единицей при нашем умножении точек служит точка $(1, 0)$, лежащая на оси абсцисс на расстоянии 1 вправо от начала координат. Полагая, далее в (6), что $\alpha = 1 = (1, 0)$, мы получим, что при $\beta \neq 0$ точкой, обратной для β, будет

$$\beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right). \tag{7}$$

Таким образом, мы построили систему чисел, изображаемых точками плоскости, причем операции над этими числами определяются по формулам (2) и (3). Эта система чисел называется *системой комплексных чисел.*

Покажем, что *система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел.* Для этой цели рассмотрим точки, лежащие на оси абсцисс, т.е. точки вида $(a, 0)$; ставя в соответствие точке $(a, 0)$ действительное число a, мы получаем, очевидно, взаимно однозначное соответствие между рассматриваемым множеством точек и множеством всех действительных чисел. Применение к этим точкам формул (2) и (3) дает равенства

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0),$$

т.е. точки $(a, 0)$ складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие действительные числа. Таким образом, множество точек, лежащих на оси абсцисс, рассматриваемое как часть системы комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от системы действительных чисел, обычным способом изображенной точками прямой линии. Это позволяет не различать в дальнейшем точку $(a, 0)$ и действительное число a, т.е. всегда полагать $(a, 0) = a$. В частности, нуль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ системы комплексных чисел оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

Теперь нужно показать, что среди комплексных чисел содержится корень уравнения (1), т.е. такое число, квадрат которого равен действительному числу -1. Это будет, например, точка (0,1), т.е. точка, лежащая на оси ординат на расстоянии 1 вверх от начала координат. Действительно, применяя (3), получаем

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Условимся обозначать эту точку буквой i, так что $i^2 = -1$.

Покажем, наконец, что для построенных нами комплексных чисел может быть получена их обычная запись. Для этого найдем сначала произведение действительного числа b на точку i:

$$bi = (b,0) \cdot (0,1) = (0,b);$$

это будет, следовательно, точка, лежащая на оси ординат и имеющая ординату b, причем все точки оси ординат представимы в виде таких произведений. Если теперь (a, b) - произвольная точка, то ввиду равенства

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

получаем

$$(a,b) = a + bi,$$

т.е. мы действительно приходим к обычной записи комплексных чисел; произведение и сумму в выражении $a+bi$ следует понимать в смысле операций, определенных в построенной нами системе комплексных чисел.

Заметим, что проведенное выше построение системы комплексных чисел подсказывает следующий вопрос: нельзя ли так определить сложение и умножение точек трехмерного пространства, чтобы совокупность этих точек стала системой чисел, содержащей в себе систему комплексных чисел или хотя бы систему действительных чисел? Ответ на это вопрос оказывается отрицательным.

В соответствии с историческими традициями комплексное число i называется *мнимой единицей*, а числа вида bi – *чисто мнимыми числами*, хотя существование этих чисел не вызывает сомнений и можно указать те точки плоскости - точки оси ординат, - которыми эти числа изображаются. В записи комплексного числа α в виде $\alpha = a + bi$ число a называется *действительной частью* числа α, bi – его *мнимой частью*, а число b – *коэффициентом мнимой части* комплексного числа. Два комплексных числа равны между собой, когда их действительные части и коэффициенты мнимых частей равны между собой. Следует заметить, что для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не могут быть разумно определены, так как эти числа, в отличие от действительных чисел располагаются не на прямой линии, линии, точки которой естественным образом упорядочены, а на плоскости. Поэтому, сами *комплексные числа никогда нельзя соединять знаком неравенства*. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами по изложенному выше способу, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется действительной осью, так как ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется *мнимой осью*.

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде $a+bi$, производится следующим образом, как вытекает из формул (2), (4). (3) и (6)

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \tag{8}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i, \tag{9}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i, \tag{10}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{11}$$

Таким образом, можно сказать, что *при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части*; аналогичное правило имеет место и для вычитания. Словесные выражения для формул умножения и деления были бы слишком громоздкими и мы их не даем.

Покажем, что с выражениями вида $a+bi$ можно обращаться как с многочленами. В самом деле, по определению сложения:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

или, в обычной записи:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Таким образом, комплексные числа $a+bi$, $c+di$ складываются так, как складываются многочлены. Подобное же заключение можно вывести и относительно вычитания, а именно

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Далее, по определению умножения:

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

или в обычной записи:

$$\left(a+bi\right)\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i\,.$$

Перемножим теперь a+bi и c+di по правилу перемножения многочленов:

$$\left(a+bi\right)\left(c+di\right)=ac+adi+cbi+bdi^2\,.$$

Но $i^2=-1$, поэтому

$$\left(a+bi\right)\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i\,.$$

Остается разобрать деление. Мы знаем [см. формулу (6)], что

$$\frac{\left(a,b\right)}{\left(c,d\right)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right),$$

или в обычной записи

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

К этому же результату можно прийти иначе. Пусть дано комплексное число $\alpha=(a,b)$. Число a-bi, отличающееся от α лишь знаком при мнимой части, называется числом, *сопряженным* с α, и обозначается $\bar{\alpha}$. Например, $2+i$ сопряжено с $2-i$. Легко показать, что произведение двух сопряженных чисел есть действительное число; в самом деле

$$\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)=a^2-\left(bi\right)^2=a^2+b^2\,.$$

Постараемся теперь избавиться от мнимости в знаменателе дроби

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

Умножим для этой цели числитель и знаменатель на число, сопряженное со знаменателем

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{\left(a+bi\right)\left(c-di\right)}{\left(c+di\right)\left(c-di\right)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2+d^2}=\\&=\frac{\left(ac+bd\right)+\left(bc-ad\right)i}{c^2+d^2}=\frac{\left(ac+bd\right)}{c^2+d^2}+\frac{\left(bc-ad\right)}{c^2+d^2}i\end{aligned}.$$

Видно, что получилось полное совпадение с формулой (11).

Примеры.

1. $\left(2+i\right)+\left(7-5i\right)=9-4i$.
2. $\left(3-i\right)-\left(8+11i\right)=-5-12i$.
3. $\left(3+i\right)\left(6-5i\right)=18-5i+6i-5i^2=23-9i$.
4. $\dfrac{3+i}{6-5i}=\dfrac{\left(3+i\right)\left(6+5i\right)}{\left(6-5i\right)\left(6+5i\right)}=\dfrac{18+15i+6i+5i^2}{36+25}=\dfrac{13+21i}{61}=\dfrac{13}{61}+\dfrac{21}{61}i$.

Рассмотрим теперь квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0$$

с комплексными (а не только действительными) коэффициентами, решение которого дается формулой

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Очевидно, мы покажем, что всякое квадратное уравнение разрешимо, если докажем, что из всякого комплексного числа можно извлечь квадратный корень.

Пусть надо извлечь квадратный корень из числа $\alpha = a + bi$. Мы не знаем пока, существует ли такое комплексное число, квадрат которого равен α. Предположим, что такое число $u + vi$ существует, т.е. употребляя обычную символику, можно записать

$$\sqrt{a+bi} = u + vi .$$

Здесь u и v неизвестные, их надо определить. Если обе части уравнения возвести в квадрат, то получится

$$a + bi = \left(u^2 - v^2\right) + 2uvi .$$

Но два комплексных числа равны, когда равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей. Следовательно

$$\left.\begin{aligned} &u^2 - v^2 = a, \\ &2uv = b. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (12), а затем складывая их, получаем

$$\left(u^2 - v^2\right)^2 + 4u^2v^2 = \left(u^2 + v^2\right)^2 = a^2 + b^2 ,$$

откуда

$$u^2 + v^2 = +\sqrt{a^2 + b^2} ;$$

Положительный знак взят потому, что числа u и v действительные, и поэтому левая часть равенства положительная. Из этого равенства и из первого из равенств (12) получаем

$$\begin{aligned} &u^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right), \\ &v^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Мы приходим, извлекая квадратные корни, к двум значениям для u, отличающимся друг от друга знаком, а также к двум значениям для v. Все эти значения будут действительными, так как квадратные корни будут извлекаться при любых a и b из положительных чисел. Полученные значения для u и v нельзя комбинировать между собой произвольным образом, так как, ввиду второго из равенств (12) знак произведения uv должен совпадать со знаком b. Это дает две возможные комбинации значений u и v, т.е. два числа вида $u + vi$, которые могут служить значениями квадратного корня из числа α; эти числа отличаются друг от друга знаком. Элементарная, хотя и громоздкая, проверка (возведением полученных чисел в квадрат, отдельно для случая $b > 0$ и для случая $b < 0$) показывает, что найденные числа действительно являются значениями квадратного корня из числа α.Таким образом, извлечение квадратного корня из комплексного числа всегда возможно и дает два значения, отличающихся друг от друга знаком.

В частности, теперь делается возможным извлечение квадратного корня и из отрицательного действительного числа, причем значения этого корня будут чисто мнимыми. В самом деле, если $a < 0$ и $b = 0$, то $\sqrt{a+bi} = -a$, так как этот корень должен быть положительным, а тогда $u^2 = \frac{1}{2}\left(a - a\right) = 0$, т.е. $u = 0$, откуда $\sqrt{a} = \pm vi$.

Таким образом, цель, поставленная выше, достигнута: *на множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение разрешимо.*

Пример. Пусть $\alpha = 21 - 20i$. Тогда $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{441 + 400} = 29$.

Поэтому $u^2 = \frac{1}{2}(21+29) = 25$, $v^2 = \frac{1}{2}(-21+29) = 4$, откуда $u = \pm 5$ и $v = \pm 2$.

Знаки u и v должны быть различными ввиду отрицательности b, поэтому

$$\sqrt{21-20i} = \pm(5-2i).$$

Пример. Уравнение

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Не имеет действительных корней, так как

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$$

Зато оно имеет комплексные корни

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример. Решим квадратное уравнение

$$x^2 - (4-6i)x + (10-20i) = 0.$$

Здесь $p = -(4-6i)$, $q = 10-20i$; поэтому

$$x = (2-3i) \pm \sqrt{(2-3i)^2 - (10-2i)} = (2-3i) \pm \sqrt{-15+8i}.$$

Извлекаем квадратный корень из комплексного числа -15+8i с помощью формул (13).

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(-15 + \sqrt{15^2+8^2}\right) = 1,$$

$$v^2 = \frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{15^2+8^2}\right) = 16.$$

Откуда $u = \pm 1$, $v = \pm 4$, и

$$\sqrt{-5+8i} = 1+4i.$$

Следовательно

$$x_1 = (2-3i) + (1+4i) = 3+i,$$

$$x_2 = (2-3i) - (1+4i) = 1-7i.$$

Задачи.

Вычислить следующие выражения:

1. $(2-i)+(3-12i)-(31+45i)-(8-7i)$.
2. $(2-i)\cdot(8-7i)-(20+11i)\cdot(1-3i)+(4-17i)\cdot(5-4i)$.
3. $\dfrac{(5-2i)\cdot(8+i)-(12-13i)\cdot(6+7i)}{(1-2i)^3+(1+2i)^2}$.

Вычислить корни

4. $\sqrt{1+i}$.
5. $\sqrt{8-5i}$.
6. $\sqrt{19-6i}$.

Решить уравнение

7. $x^2 - 2x + 5 = 0$.

8. $(1+i)x^2-(7+2i)x+(8-i)=0$.

Ответы.

1. $-34-51i$.
2. $-92-74i$.
3. $\frac{398}{58}+\frac{241}{58}i$.
4. $1,099+0,455i$, $-1,099-0,455i$.
5. $2,95-0,85i$, $-2,95+0,85i$.
6. $4,41-0,68i$, $-4,41+0,68i$.
7. $x_{1,2}=1\pm 2i$.
8. $x_1=\frac{2+i}{1+i}$, $x_2=3-2i$.

1.2. Определение комплексного числа

Комплексное число z – упорядоченная пара вещественных чисел (x,y):

$$z=(x,y).$$

$x=\operatorname{Re} z$ - вещественная часть z.

$y=\operatorname{Im} z$ - мнимая часть z.

Равенство комплексных чисел:

$$z_1=z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix}\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2\\ \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2\end{matrix}\right\}.$$

Комплексное число $z=(x,y)$ можно изобразить точкой координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации плоскостью комплексных чисел, ось Ox – вещественной осью, ось Oy – мнимой осью.

Арифметические операции над комплексными числами $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$:

(a) сложение:

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2);$$

(b) умножение:

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

Свойства арифметических операций:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (коммутативность сложения)
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (ассоциативность сложения)
3. $z_1z_2=z_2z_1$ (коммутативность умножения)
4. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения)
5. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3)$ (дистрибутивность).

Обратные операции:

(c) вычитание:

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),$$

(d) деление:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

1.3. Алгебраическая форма комплексного числа

Число $i = (0,1)$ называется мнимой единицей.

Квадрат мнимой единицы представляет собой вещественное число, равное -1:

$$(1,0) \cdot (1,0) = (-1,0) = -1.$$

Тогда для любого числа $z = (x, y)$ имеем

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = x + y \cdot (0,1) = x + iy.$$

Это алгебраическая форма комплексного числа.

Пусть $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ и $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$, тогда

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(\ y_1 + y_2),$$

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(\ y_1 - y_2),$$

$$z = z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

1.4. Сопряжение. Пусть $z = x + iy$.

Сопряженное к z число: $\overline{z} = x - iy$.

Свойства операции сопряжения:

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;
5. $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

1.5. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Точка $z = (x, y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и полярными координатами (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \le r \le \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

Число r называется модулем числа z, φ - аргументом:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z .$$

Рис.2.

Аргумент определен неоднозначно (с точностью до $2\pi n$), поэтому различают

(1) главное значение аргумента $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$;

(2) (многозначный) аргумент $Arg\, z = \arg z + 2\pi n, \quad n \in Z$; используются также записи

$$Arg\, z = \arg z \pmod{2\pi}, \qquad Arg\, z = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Это – тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Перемножим два числа:

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ & = r_2 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_1 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = \\ & = r_2 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad Arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 .$$

1.6. Формула Эйлера. Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Она обладает свойством

$$f(\varphi_1)\cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Эта функция обозначается $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

Это – формула Эйлера.

Средствами анализа можно доказать, что функция   действительно является показательной функцией.

Показательная форма записи комплексных чисел:

$$z = r\, e^{i\varphi},$$

где

$$r = |z|, \qquad \varphi = Arg\, z .$$

Из формулы Эйлера получаем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi;$$

Складывая/вычитая эти равенства находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.7. Возведение в степень. Тригонометрическая и показательная формы записи полезны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$